未完成な証明の生成過程における思考や行為の様相
―インタビュー調査の分析を通して―

On Students' Ideas and Performances in Generating an Incomplete Proof on Geometry
Through Analysis of Interview Survey

牧野　智彦†

MAKINO Tomohiko

概要（Summary）

本稿の目的は，未完成な証明を生成した生徒の思考や行為の様相の一端を示すことである．そのために，異なるタイプの未完成な証明を生成した3名の生徒に対してインタビュー調査を実施し，得られたデータを分析した．その結果，未完成な証明の生成過程における思考や行為についてのいくつかの様相を推察した．そして，各様相に応じた具体的な指導の手立てを提案した．

キーワード：未完成な証明，図形の証明，思考や行為の様相，証明の教授・学習，中学校

１．はじめに

我が国の中学生の証明に関する学習状況は望ましくないことが，「特定の課題に関する調査」，「全国学力・学習状況調査」など全国規模の各種調査の結果から窺える．

周知の通り，証明学習は「完全にできているか，全くできていないかではない」(Senk, 1985)のである．実際，生徒の解答には，ある程度記述されているが論理的な誤りや飛躍があるもの，あるいは記述が途中で止まっているものが見られる．本研究は，証明の学習や指導の現状の改善へ向けて，証明に取り組んでいるにも関わらず完成に至っていない解答に焦点を当てる。

数学教育学研究において，これまで，証明を構成，記述できない原因を解明する研究がなされてきている(例えばMoore, 1994; Furinghetti & Morselli, 2004, 2009; Lin, 2005, Heinze et al., 2008)．一方で，証明の構想・構成の仕方についての研究も蓄積されている(例えばSolow, 1985; 清水, 1994; Heinze et al., 2008; 辻山, 2010)．

本研究は，証明を構成することに関する生徒の学習状況に沿った指導を考えるために，未完成な証明が生成される過程で何が起こっているのか，その過程でどのような思考や行為がなれているのかに関心がある．そこで，未完成な証明の生成した生徒が証明を構成するときに何を考え，どのような判断に基づいて，何を行っているのかを探っていきたい。

本稿の目的は，未完成な証明を生成した生徒の思考や行為の様相の一端を示すことである．そのために，未完成な証明の意味を述べた後に，未完成な証明のタイプを示す．そして，未完成な明を生成した生徒に対するインタビュー調査で得られた情報から，生徒の思考や行為を読み取る．

２．未完成な証明と分類

2.1. 未完成な証明の定義

Heinzeら(2008)によれば，未完成な証明は，生徒が演繹的な推論を試みているが，論理的な誤

† 宇都宮大学 教育学部（連絡先： makino@cc.utsunomiya-u.ac.jp）

り(error)や飛躍(gap)があるものである．すなわち，証明をするための必須の要素を認識しているが，ステップを間違っているものや，論理関係では後に出てくる性質を，先の命題の証明に使ってしまうなど，推論の順番が逆になったりしているものである．なお，本稿では，生徒による証明が完成されているか未完成なのかは，教師や調査者が判定する。

2.2.未完成な証明の分類

2.2.1 未完成な証明の判断基準

本稿では，未完成な証明の定義に基づいて，未完成な証明であるかどうかを判断する．一つ目の観点は，「論理的な飛躍」(Logical Gap：LG)で、すなわち，前提と結論を繋げる「中間命題」を見出すことができていないことが判断基準になる．例えば，合同条件を用いた証明問題で言えば，「合同まで記述して止まっているもの」，「合同から直接結論を導いているもの」は，この観点での失敗とみなし，未完成な証明と判断する．

二つ目は，「論理的な誤り」(Logical Error：LE)である，証明を構成する上での「誤り」があることが判断基準になる．例えば，合同条件を用いた証明問題で言えば，「合同が証明されてからわかることを，合同の証明に使っているもの」，「合同条件に一致しない性質の組を選択しているもの」は，この観点での失敗とみなし，未完成な証明と判断する．

また，本稿では，全国学力・学習状況調査の解答類型を参考にして，表現が十分でなかったり，記号を書き忘れていたりしても，証明の道筋が正しいと分かるものは正答とした．例えば，合同条件を利用する証明問題で，「①，②，③より」とだけ記述し，合同条件を記述していない解答は，合同条件の記述がなくても，「①，②，③」が合同条件を満たす組となっていることが読み取れれば正答とする．また，合同の記号を「＝」と記述したり，2つの三角形の頂点の対応が合っていなかったりしても，証明の道筋が正しいと分かるものは正答とした．

2.2.2 解答の分類の観点

本稿では，次の問題に対する中学生の解答を分類する．

平行四辺形ABCDで，辺CDの中点をEとし，AEの延長とBCの延長との交点をFとする．

そのとき，BC=CFであることを証明しなさい．

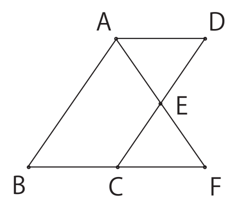

図2：調査問題

未完成な証明の判断基準と正答の基準にしたがって，調査問題の解答を分類する観点を設定する．まず，「論理的な飛躍」の観点では，結論BC=CFまで記述しているかどうかで分類した．結論まで記述したということは，妥当かどうかはともかく，生徒なりに結論までの道筋をつくったことを示している．一方で，結論が記述されていなかったということは，その道筋を見出せなかったことを示している．前者の生徒には，証明を完成させたという意識があり，後者の生徒には，証明を完成させられなかったという意識があると思われる．このような意識の差を区別したいために分類した．

次に，結論BC=CFを記述している解答の中で，中間命題をどこまで見出しているかという観点で分類した．そして，結論BC=CFを記述していない解答については，2つに分類した．一つは，中間命題として「△AED≡△FEC」まで導いている解答，あるいは，合同な図形の性質の「AD=CF」や平行四辺形の性質の「AD=BC」までを導いている解答で，もう一つは，△AED≡△FECを示そうとしたが示せなかった解答である．

表１：論理的な飛躍の観点

LG0	結論あり	AD=CFとAD=BCを記述しているか，読み取ることができる．
LG1	結論あり	AD=CFとAD=BCのいずれかを記述しているか，読み取れることができる．
LG2	結論あり	△AED≡△FECから結論BC=CFを直接導出している．
LG3	結論なし	△AED≡△FEC，あるいは，AD=CF，AD=BCまで記述している．
LG4	結論なし	△AEDと△FECが合同であることを示そうとしたが示すことができなかった．

一方，「論理的な誤り」の観点では，誤りの種類で分類することにした．しかし，誤りには順序性があるわけではないので，誤答として出現する頻度に基づいてコード化を行った．

表２：論理的な誤りの観点

LE0	誤った性質を記述していない．
LE1	△AED≡△FECを示すのに，AD=CFやAE=FEを使用している．
LE2	△AEDと△FECで，合同条件「一辺と両端の角がそれぞれ等しい」と一致しない性質の組を記述している．あるいは，「∠AED=∠FEC，∠EDA=∠ECF」だけで，合同条件を「一辺と両端の角がそれぞれ等しい」と記述している．
LE3	その他の誤り

2.2.3 未完成な証明のタイプ

生徒の解答を，「論理的な飛躍」と「論理的な誤り」の2つの観点を基に分類すると，次の4つのタイプに大別することができる．第一に，「論理的な飛躍」があるが，「論理的な誤り」がない解答（①），第二に，「論理的な飛躍」はないが「論理的な誤り」がある解答（②），第三に，「論理的飛躍」も「論理的な誤り」も両方ある解答（③）である．そして，「論理的な飛躍」もなく，「論理的な誤り」もない解答，すなわち正答（網掛け部分）である．

表３：未完成な証明のタイプの分類枠組み

<table>
<tr><th></th><th>LE0</th><th>LE1</th><th>LE2</th><th>LE3</th></tr>
<tr><td>LG0</td><td></td><td colspan="3">②</td></tr>
<tr><td>LG1</td><td rowspan="4">①</td><td colspan="3" rowspan="4">③</td></tr>
<tr><td>LG2</td></tr>
<tr><td>LG3</td></tr>
<tr><td>LG4</td></tr>
</table>

本稿では，表3での①が示す範囲に含まれる各解答から成るグループを「未完成な証明のタイプⅠ」とする．②が示す範囲に含まれる各解答から成るグループを「未完成な証明のタイプⅡ」，そして，③が示す範囲に含まれる各解答から成るグループを，「未完成な証明のタイプⅢ」とする．

2.2.4. 各タイプの未完成な証明の分布

平成24年10月15日から10月26日に栃木県内の公立中学校2校の3年生244名を対象に，図2の問題に対して筆記調査を実施した．筆記調査は授業開始直後の10分間で行われた．

分類結果は，表4の通りである．調査問題に正答した生徒は，62名（25.4%）で，無解答は20名（8.2%）であった．そして，タイプⅠは26名(10.7%)，タイプⅡは31名(12.7%)，そしてタイプⅢは37名(15.2%)であった．上記以外の解答が77名であった．

表４：未完成な証明の分布

<table>
<tr><th></th><th>LE0</th><th>LE1</th><th>LE2</th><th>LE3</th></tr>
<tr><td>LG0</td><td>62</td><td>17</td><td>13</td><td>1</td></tr>
<tr><td>LG1</td><td>8</td><td>4</td><td>4</td><td>0</td></tr>
<tr><td>LG2</td><td>3</td><td>8</td><td>3</td><td>0</td></tr>
<tr><td>LG3</td><td>5</td><td>6</td><td>5</td><td>0</td></tr>
<tr><td>LG4</td><td>10</td><td>7</td><td>0</td><td>0</td></tr>
<tr><td>上記以外</td><td colspan="4">77</td></tr>
<tr><td>無解答</td><td colspan="4">20</td></tr>
</table>

3．インタビュー調査の結果と考察

平成24年12月21日にインタビュー調査を実施した．インタビュー調査の対象者は，筆記調査の解答の分類結果をもとに，調査の協力校の数学教諭と相談しながら，自分のことをよく話すことができる，協力的な生徒を選出した．

インタビューは筆者が行った．インタビュー調査は，筆記調査の解答を見ながら，調査者が用意した質問に回答する形式とした．調査者は，生徒のはす向かいに座り，インタビューの様子はビデオカメラとICレコーダーで録画した．インタビュー調査は15分程度で行った．

3.1. 生徒AKの証明過程における思考と行為

図3の生徒AK（女子）の解答は，「△ADE≡△FCE」までを記述して止まっていたが，合同を示す証明の中には誤りや論理的な飛躍がみられない．生徒AKの解答は（LG3，LE0）のタイプである．

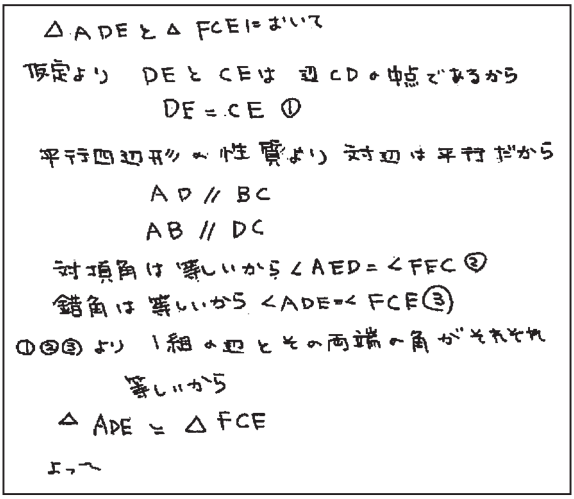

図３：生徒AKの証明

インタビュアーの「証明の構想や構成において，結論から考えていくか」という質問に対して，生徒AKは次のように回答した．

01In：BC=CFを言うには，AD=BCとAD=CFがいえればいいから，AD=CFをいうには，二つの三角形の合同がいえればいいなぁなんて考えますか？

02AK：どうだろう．う～ん．あんまり結論見ないんで．あの，で，わ～って解いて，間違ってたらとか，ま，間違ってたら終わっちゃうんですけど．ふふふ，

（中略）

03In：わかること，できそうなこととか，ぱっと見て合同がいえそうだなっていうふうに考えていくのは，その方がわかりやすいのかな？

04AK：あ，たぶん，はい．あ～，まえ，だんだん，だんだんこうやっていくのが，いいです．

生徒AKの02AK「わ～って解いて」という発言から，生徒AKが計算問題を解くようなイメージで証明に取り組んでいることが窺える．さらに，04AKの「だんだん，だんだんこうやっていく」という発言にも，結論というよりも前提から考えている様子が窺える．

また，「今だったら合同と結論を繋げられるか」と質問したところ，生徒 AK は次のように述べた．

05In：今だったらどう思いますか？いけそう？

06AK：いけ，う〜ん，なんか，びみょうです．ふふふ．あの，ADとBCとか，CFとかだったら，まだ，わかるんですけど．隣になっちゃうと，なんか，自分で，どうやってやるんだろうっていうのがあります．

06AKの「ADとBCとか，CFとかだったら，まだ，わかるんですけど」という発言は，生徒AKは，解答には記述していなかったが，AD=BCやAD=CFといった中間命題を見出していたことを示している．

その一方で「隣になっちゃうと，…どうやるんだろう」と発言しているように，彼女は中間命題を導出したにもかかわらず，それらと結論をどのように繋げたらよいのかがわからなくて止まってしまっていたようである．

3.2. 生徒IAの思考と行為

図4の生徒IA（男子）の解答は，タイプⅡの中の（LG0, LE2）のタイプである．生徒IAは，AD=BCとAD=CFを明記しており，これらから結論BC=CFを導いていた．しかし，△ADE≡△FCEを示すのに，DE=CE，∠DAE=∠CFE，∠AED=∠FECという一辺とその両端の角の位置関係にない性質の組を選択しているにもかかわらず，合同条件「1組の辺とその両端の角がそれぞれ等しい」を記述していた．

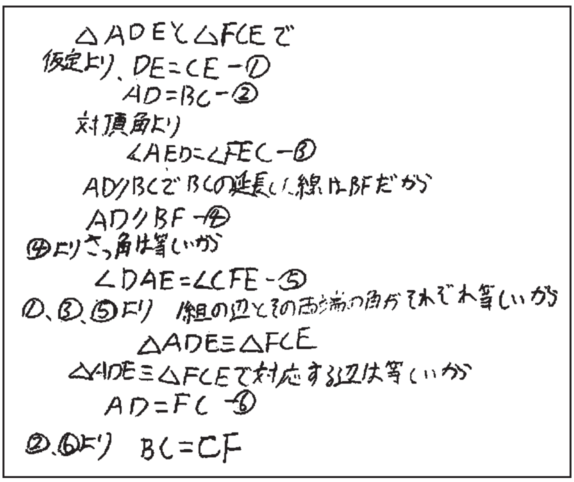
△ADEと△FCEで
仮定より、DE=CE－①
AD=BC－②
対頂角より
∠AED=∠FEC－③
AD//BCでBCの延長した線はBFだから
AD//BF－④
④よりさっ角は等しいから
∠DAE=∠CFE－⑤
①、③、⑤より 1組の辺とその両端の角がそれぞれ等しいから
△ADE≡△FCE
△ADE≡△FCEで対応する辺は等しいから
AD=FC－⑥
②、⑥より BC=CF

図４：生徒IAの解答

インタビュアーによる「証明の構想や構成において，結論から考えていくか」という質問に対して，生徒IAは，次のように回答した．

01In：BC=CFを言うには，何がいればいいかなんていうことを，まず考える？

02IA：えっと〜，ADとBCが等しい，あ，違う．ADとCFが等しければ，BCとCFもいえるなって．

03In：そうすると，BCとCFが等しいっていうのは結論だから，（はい）それはどこか頭にあるのかな？

04IA：はい．あって．（あって）そうですね，はい．

05In：で，それをいうには，ADとCFがいえれば．

06IA：はい，いえれば，BC=CFもいえるだろうって．

07In：そういうふうに考えるのは，なぜかな？
08IA：いや，なんか，問題だし，そんな簡単には解かせてくれないから，こう，答えを別のところに，持ってて，持ってて，持ってて，最終的に結びつける，みたいな.

生徒IAは，03Inの「結論は，どこか頭にあるのかな？」という質問に対して，04IAで「はい.あって.」と同意した．また，08IAの「答えを別のところに，持ってて，持ってて，持ってて，最終的に結びつける」とも発言した．08IAでの「答え」は結論と思われるので，生徒IAは結論から考えて証明を構成しているようである.

次に，複数の中間命題を導出した後，どのようにして当該証明に使用する中間命題を見出していくかについて質問した．それに対して，生徒IAは次のように述べた.

01In：例えば，2つの辺が等しいことがわかってて（はい），1つの角が等しいことがわかってる.（はい）その時点で，2つの辺と1つの角だから，例えば，あ，2辺とその間の角だ（あ，はい），というふうに決めちゃう？
02IA：そ，そうですね．決め，あ，前提に進めてって，途中で，違うなっと思ったら，変えたり.（変えたり）
03In：あ～，途中で変えるというのは，一応，チェックするんですか.
04IA：確認してって（うん），自分の中で，証明をつくっていって（うん），途中で，「あっ，できないな」と思ったら，あの，違う，また角とか辺とかを見つけ出して，それでまた（ああ～，なるほど).

02IAの「前提に進めていって」，「途中で，違うなと思ったら，…変える」という発言から，生徒IAは導出した中間命題を仮のものと捉えていて，検討の結果，当該証明に使えない場合もあることを認識しているのではないだろうか.

一方で，インタビュアーは，生徒IAの解答を使いながら，「1組の辺とその両端の角がそれぞれ等しい」という合同条件と，合同条件を導く性質の組として記述されている①，③，⑤とが一致していないという誤りについて質問した．それに対して，生徒IAは，次のように回答した.

01In：これ，どう？1辺とその両端の角になってる？
02IA：角になってる？
03In：1辺とその両端の角.（あっ）…（DE=CEを指して）ここだよね.（∠AEDと∠FECを指して）ここと，ここが等しいんだよね（はい)．で，DAE,ここだ（はい)．そして，CFE
04IA：あ，あれ？そう書いてる？…あ，間違ってる.
05In：間違っているんだけど，なぜこれでいいと思ったのか教えてもらえる？
06IA：たぶん，書き間違い（あ～，書き間違えたか)．その可能性が高いです（なるほど)．見直ししないで（うん），そのままばっと（なるほど）.

02IAの「角になってる？」のように，最初はインタビュアーの意図が伝わらなかったが，03Inのインタビュアーによる具体的な説明の中で，04IA「あ，間違ってる」と自らの誤りに気付いた.生徒IAはインタビュアーに具体的に誤っている点を示されるまで，なかなか自らの誤りに気付かず，間違えていたことが意外であったという様子を見せた.

これは，生徒IAが，△ADE≡△FCEを示す証明を考えているときは，∠DAE=∠CFEではなく，∠EDA=∠ECFを選択していたと考えられる．それは，04IAの「あ，あれ？そう書いてる？」や，06IAの「書き間違い，その可能性が高いです」とあるように，当初の自分の選択したものと，結

果として記述したものがズレていたことを窺わせる．

この理由として，生徒IAは，自ら06IAで「見直ししないで，ばっと」と発言している．そこで，インタビュアーが証明を見直すかどうかについて尋ねた．

01In：証明をしている途中，あるいは証明をした後，証明に間違いがあるかどうかっていうのをチェックしますか．見直すってことをする？
02IA：記号だけチェックします．
03In：記号だけチェックする．じゃ，証明の流れとか，そういうのはチェックしない．
04IA：はい．あんまり．
05In：チェックしない，見直さないのはなぜだか教えてもらえる？
06IA：書き間違えることがないかな，っていう
07In：なるほど，つまり間違ってないっていう確信があるのかな．
08IA：はい．

生徒IAは証明の流れについてチェックしない理由として，書いている段階で間違っていないという自信があることがうかがえる．しかし，今回は，その自信が障害となっていた．未完成な証明の生成において，生徒IAのように，確信や自信といった情意面の影響も関わっていることがわかる．

3.3. 生徒SRの思考と行為

図5の生徒SR（女子）の解答は，AD=BCと結論BC=CFを明記していたが，AD=CFを記述していない．また，△AED≡△FECを示すのに，DE=EC，∠ADC=∠FCD，∠DAF=∠CFEという，一辺とその両端の角の位置関係にない性質を選択しているにもかかわらず，合同条件「1組の辺とその両端の角がそれぞれ等しい」を記述していた．生徒SRの解答はタイプⅢの（LG1, LE2）のタイプである．

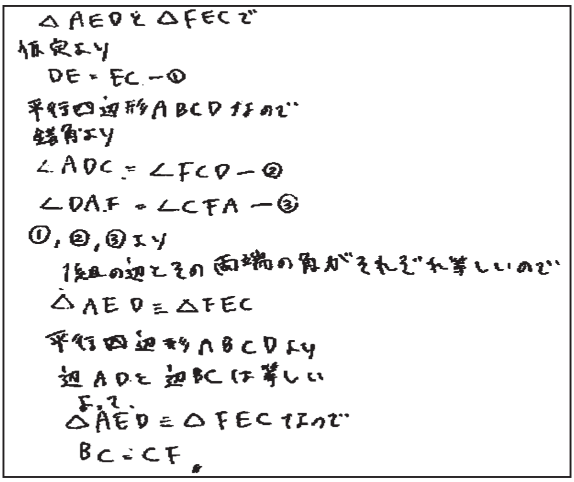
△AEDと△FECで
仮定より
DE=EC ―①
平行四辺形ABCDなので
錯角より
∠ADC=∠FCD ―②
∠DAF=∠CFA ―③
①,②,③より
1組の辺とその両端の角がそれぞれ等しいので
△AED≡△FEC
平行四辺形ABCDより
辺ADと辺BCは等しい
よって
△AED≡△FECなので
BC=CF.

図５：生徒SRの解答

インタビュアーの「結論から考えるかどうか」についての質問に対して，生徒SRは次のように答えている．

01In：結論BC=CFをいうにはどう考えていったらいいかな，何がいえればいいかなっていうふうに，結論から考えていきますか？

02SR：いや，私，結論からじゃなくて，なんか，問題を読みながら仮定の部分を，まず，どんどん図に書いていって．で，最後に，BC=CFであることを証明しなさいっていうのを読んでから考えますね．

03In：いろいろ図に書き入れていって…

04SR：そうですね．全部図にいったん書いてから，これはいえるって思って，一から全部書き直します．

05In：そのとき，結論は全然見てない？BC=CFをあまり意識していない？

06SR：はい，まずは2つがいえれば，ADとBCの長さは同じなんで，BCとCF，いえるかなぁとか．そんな感じで．

04SRで「全部図にいったん書いてから，これはいえるって思って，一から全部書き直します」とあるように，生徒SRは，図に書き入れた諸性質を組み合わせて，中間命題を導出していることが窺える．すなわち，結論からではなく前提から推論しているようである．しかも，06SRで「まずは2つがいえれば，ADとBCの長さは同じなんで，BCとCF，いえるかなぁ」という発言は，生徒SRが△AED≡△FECから結論BC=CFへの方針を立てている様子を表している．

次に，インタビュアーによる「なぜAD=CFを書かなかったのか」という質問に対する生徒SRの答えを取り上げる．

01In：合同だってことと（あ～），AD=BCから，BC=CFにいってるんだけど．そこは．

02SR：ああ～，そうですね．えっと…なんていうんだろうな～．…この2つの三角形が等しいんで，えっと，ここのADの長さは（はい），CFと等しいので，このADとBCなので，BCとCFは等しい．

03In：AD=CFっていうのを書かなかったんだけど（あ～），でもね，（そうですね～）今のSRさんの話を聞くと，頭の中ではわかって（わかってるんですけどね）るんだよね．…（はい）こう，書かなかったっていうのは，何か理由があるのかな？

04SR：う～ん．たぶん，思ってたとしても，忘れて，次，次って感じで，新しいことに，書いちゃって，抜かしちゃったんだと思います．

生徒SRは，02SRで△AED≡△FECからAD=CFを導いたこと，そして，03Inに見られるように，インタビュアーの話に応じて，「そうですね～」，「わかってるんですけどね」と，AD=CFを書かなかったけれども，その存在には気付いていたことを表現している．

しかし，AD=CFを書かなかった理由について，04SRで「次，次って感じで，新しいことに，書いちゃって」と発言しているように，生徒SRは，問題の条件を組み合わせて新しいことを「次から次へ」と導出し，その都度記述している様子が窺える．このことから，生徒SRは，△AED≡△FECとAD=BCから結論BC=CFが演繹できるかどうかを評価していなかったと考えられる．

一方，生徒SRは，生徒IAと同じく，一辺とその両端の角の位置関係にない性質を選択しているにもかかわらず，「1組の辺とその両端の角がそれぞれ等しい」という合同条件を記述していた．先述した生徒IAは見直しをしなかったために，最終的に証明全体の論の流れがどのようになっているのかを把握できていなかったと考えられる．

そこで，生徒SRにも証明を書いた後に見直しをするかどうかを尋ねた．

01In：証明をしながらとか，書きながらとかでもいいし，書いた後でもいいんですけど，自分の書いた証明を見なすなんてことはしますか？

02SR：見直しはしないです．（しない）

03In：どうしてしないかってことを教えてほしいんですけど．

04SR：やっぱり，時間がないっていうことで．

05In：あ，時間がないからなのね．（はい）例えば，時間がたくさんあったとしたら，どうしますか？そういうときでも見直さないですか？

06SR：そうですね．う～ん，そうですね．やっぱり，めんどくさくなっちゃう，と思います．

04SRの「時間がないってことで」や06SRの「やっぱり，めんどくさくなっちゃう」という理由で，証明を見直さなかった．

４．考察

4.1. 未完成な証明の生成過程における思考と行為の様相

筆記調査の分布と，インタビュー調査の結果の分析から，未完成な証明を生成過程においていくつかの様相が見えてきた．

第一に，前提から推論することに偏ることで，「論理的な飛躍」をもたらす可能性があることが確認された．生徒IAのように，結論からの推論を利用することで，「論理的な飛躍」を回避することができそうである．さらに，生徒IAは，結論からも推論するとともに，中間命題を「仮のもの」と捉えている．生徒IAのように，「仮説的に考える」ことによって，前提から結論までを飛躍なく繋げることができるのはないだろうか．

第二に，解答に中間命題を記述していないからといって，それを見いだせていないわけではないということである．このことは，生徒AKと生徒SRに共通に見られた．結果として，途中までしか記述されていなかったとしても，生徒の証明過程はもう少し進んでいる可能性があることに注意したい．では，なぜ記述しなかったか？一つは，生徒AKのように，途中まではいっているが，結論と繋げる論を見出すことができなかったことが考えられる．一方で，生徒SRは，結論までの論が立っているにもかかわらず，中間命題を記述していなかった．生徒SRは，「思ってたとしても，忘れて」や「抜かしちゃった」と発言していた．この発言から，おそらく，生徒SRは，「AD=CF」を自分の頭の中で確認して，「AD=CF」を記述する前に，「だから～」と次の思考へ移行してしまい，そのまま証明を展開していったのではないだろうか．このようなことは，中学生に限らず，我々でもよくあることである．解答だけをみて，生徒の思考や行為を決めつけることのないようにしたい．

第三に，証明を見直すことの価値を見いだしていないということである．生徒IAや生徒SRのように，あと一歩のところで完成に至らないのは，証明を見直して，演繹のステップをはじめ，証明全体の論についてチェックしていないことが影響しているのではないだろうか．生徒SRも，もしかしたら，証明の過程を振り返る習慣があれば，「AC=CF」が抜けていることに気付けたかもしれない．その理由に，「間違っていない自信」，「面倒くさい」といった情意の影響がある点は興味深い．ややもすると，証明を見直すことの意義を理解すれば，自ずと証明を見直すようになると考えがちである．しかし，情意が影響しているとなると，情意の変化をもたらさないと，生徒の思考や行為は改善されないかもしれない．

最後に，未完成な証明でも，結論まで導いている生徒は，Boero(2001)が言う「予期的な思考」ができているかもしれない．例えば，生徒IAの「ADとCFが等しければ，BCとCFもいえるなって．」や，生徒SRの「まずは2つがいえれば，ADとBCの長さは同じなんで，BCとCF，いえるかなぁ」という発言である．Boeroによれば，予期的な思考が機能しない生徒は，証明過程の途中で止

まってしまうのである．生徒AKの発話をみてみると，予期的な思考が機能している様子は見受けられなかった．

4.2. 指導の具体案

第一に，前提と結論の両方向から推論することの意義を実感的に理解できるようにすることが大切である．結論から考える必然性を感じないままでは，生徒にとって馴染みのある，前提から考える方法を使い続けるのではないかと思われる．そのために，前提からの推論だけを使用することの限界と，それを克服する結論から推論することの有用性とを経験することが考えられる．

具体的には，本稿で取り上げた調査問題で考えると，△AED≡△FECから結論BC=CFを導く場面を取り上げることが考えられる．△AED≡△FECからの前向き推論では，どの性質になるかを盲目的に探していくしかない．その結果，必要な情報を見落とすこともあるかもしれない．そこで，結論に目を転じて，結論BC=CFからの後向き推論を取り入れることが考えられる．例えば，調査問題では，BC以外のCFと等しい辺はどれか，あるいは，CF以外のBCと等しい辺はどれかを探していく中で，無駄なくCF=DAとBC=ADを見出すことができると思われる．

このように，結論からの推論が機能する場を経験できる学習場面を設定することで，前提からだけでなく，結論から推論することのよさを理解できるのではないだろうか．

第二に，証明過程が，仮説的に進んでいくことを理解できるようにすることが大切である．そのためには，証明が仮説的に進んでいく過程をデモンストレーションするとともに，その過程を経験することが考えられる．

具体的には，調査問題で，△AEDと△FECの合同を証明するのに必要な性質として，ED=EC，∠AED=∠FEC，∠EDA=∠ECF，∠DAE=∠CFEの4個の性質を抽出し，辺の情報はED=ECだけであることから，合同条件が「1組の辺とその両端の角がそれぞれ等しい」になることを見出して，残りの2つの角をどれにすればよいかを考える場面を取り上げることが考えられる．その際には，すぐに「∠AED=∠FEC，∠EDA=∠ECF」という正しい組を選ばせるのではなく，「∠EDA=∠ECFと∠DAE=∠CFE」の組や「∠AED=∠FECと∠DAE=∠CFE」の組といった，可能性のある他の組合せを作らせて，それらの中から仮に一つの組合せを選択させ，それから合同を演繹できるかどうかを確かめる活動を取り入れることが大切である．

このように，複数の候補の中から仮に一つの可能性を選択して確かめてみて，もしうまくいかなければ，別の可能性を選択して再度確かめるという学習場面を設定することで，証明過程が仮説的であることを理解することができるようになると思われる．

第三に，証明の全体の論の流れを把握できるようにすることが大切である．そのためには，完成した証明を見直し，証明の全体の論の流れが受け入れられるかどうかを検討し，受け入れられない場合は，証明の全体の論の流れを受け入れられるように修正する過程を経験することが考えられる．

具体的には，例えば生徒IAによる解答のように，一見正しいが誤っている証明を提示し，証明の全体の論の流れが受け入れられるかどうかを考えて，受け入れられない場合はその理由を説明する場面を取り上げることが考えられる．生徒が，受け入れられないと判断した際には，その理由として，選択した性質の組が「DE=CE，∠AED=∠EFC，∠DAE=∠CFE」で，合同条件「1組の辺とその両端の角がそれぞれ等しい」と一致していないことを指摘させ，その誤りをどのように修正すればよいかを考える活動を取り入れることが大切である．それによって，生徒は「∠DAE=∠CFE」を

「∠EDA=∠ECF」に直して，受け入れられる証明へ改善することができると思われる．

このような学習場面を設定することで，一つ一つの演繹のステップだけを確認するだけでなく，証明全体の論の流れを把握することができるようになると思われる．

最後に，予期的に考えることができるようになるとともに，その必要性を理解できるようにすることが大切である．そのためには，与えられた性質だけからは結論を演繹できない場面で，どうすれば演繹ができるか，他にどのような性質があればよいかを予期させて，結論への演繹に適する性質を見出す経験をすることが考えられる．

具体的には，本稿での調査問題で考えると，生徒SRの解答のように，△AED≡△FECとAB=DCを与えて，それらから結論BC=CFを導出できるかどうかを考える場面を取り上げることが考えられる．生徒が，△AED≡△FECとAB=DCからは結論BC=CFを導くことができないことに気付いたときに，与えられた性質以外に，どのような性質があれば，結論BC=CFを導くことができるのかを予期的に考える活動を取り入れることが大切である．それによって，生徒は△AED≡△FECからDA=CFとAE=FEを導き，△AED≡△FECとAB=DCに，新たにDA=CFとAE=FEを加えて検討して，結論BC=CFを導くにはDA=CFがあればよいことを見出すことができると思われる．

このような学習場面を設定することで，証明過程において，予期的に考えることができるようになるとともに，その必要性に気付くことができると考える．

５．まとめと今後の課題

本稿では，未完成な証明の生成過程における生徒の思考や行為の様相を推察し，それに基づく具体的な指導について提案した．今後は，調査方法の検討も含めて，未完成な証明の生成過程における生徒の思考や行為の様相をさらに調べるとともに，それぞれの様相を改善する教授実験を実施し，教授ストラテジーの開発に資する情報を収集したい．

引用・参考文献

Boero, P. (2001). Transformation and Anticipation as Key Processes in Algebraic Problem Solving, In R. Scutherland et al. (eds.), *Perspectives on School Algebra*, Kluwer Academic Publishers, 99-119.

Furinghetti, F. & Moeselli, F. (2004). Between Affect and Cognition: Proving at University Level. *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 3, 369-376.

Furinghetti, F. & Moeselli, F.(2009). Every Unsuccessful Problem Solver is Unsuccessful in his or her own way: Affective and Cognitive Factors in Proving, *Educational Studies in Mathematics*, 70, 71-90.

Heinze, A., Cheng, Y-H, Ufer, S., Lin, F-L, Reiss, K. (2008). Strategies to foster students' competencies in constructing multi-steps geometric proofs: teaching experiments in Taiwan and Germany. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik* , Vol. 40, No. 3, 443-453.

Lin, F. L. (2005). Modeling Students' Learning on Mathematical Proof and Refutation. In Chick, H. L. & Vincent, J. L. (Eds.). *Proceedings of the 29 th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 1, 3-18.

Moore, C. R. (1994). Making the Transition to Formal Proof. *Educational Studies in Mathematics*, 27, 249-266.

Senk, S. (1985). How well do Students Write Geometry Proofs? *Mathematics Teacher*, 78, (6), 448-456.

清水静海 (1994). 論証 . クレセール中学校数学科教育実践講座第 6 巻 図形と論証 . ニチブン , 204-236.

Solow, D.（安藤四郎・西村康一・島孝司・河村昌雄訳）(1985). 証明の読み方・考え方－数学的思考過程への手引き－.共立出版.

辻山洋介(2010). 学校数学における証明の構想の意義に関する研究. 数学教育学論究, 95, 29-44.

平成28年９月30日受理